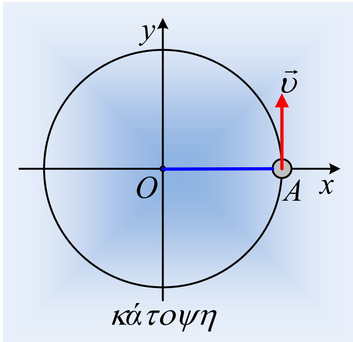
Η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της, σε μια κυκλική κίνηση.

Ένα σώμα μάζας 2kg διαγράφει **οριζόντιο** κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R=(8/π) m, δεμένο στο άκρο νήματος, με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ=2m/s. Τη στιγμή t_0=0, το σώμα διέρχεται από το σημείο Α του σχήματος.



i) Ποια η θέση και η ορμή του σώματος τη στιγμή t_1=2s;

ii) Να βρεθούν:

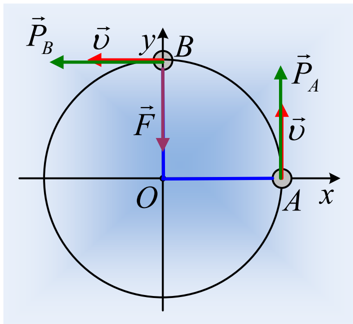
α) Η μεταβολή της ορμής μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και t_1.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος τη στιγμή t_1.

iii) Αν τη στιγμή t_2=4s, κόψουμε το νήμα να βρεθεί η θέση, η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος τη στιγμή t_3=6s.

Απάντηση:

i) Από τον ορισμό της γραμμικής ταχύτητας του σώματος που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, παίρνουμε:



$$\upsilon = \frac{s}{t} \to s = \upsilon t = \upsilon t_1 = 2 \cdot 2m = 4m$$

Το σώμα δηλαδή έχει διαγράψει τόξο, μήκους 4m. Αλλά πού ακριβώς βρίσκεται;

Υπολογίζουμε το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, βρίσκοντας:

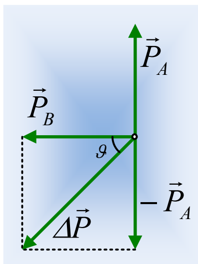
$$\Gamma = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{8}{\pi} m = 16m$$

Αλλά τότε το μήκος του τόξου που έχει διαγράψει το σώμα (4m) είναι ίσο με το ¼ της περιφέρειας του κύκλου και το σώμα περνά από το σημείο Β, του άξονα y, όπως στο διπλανό σχήμα.

Αλλά στη θέση αυτή, η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη της κυκλικής τροχιάς, οπότε και η ορμή έχει την ίδια κατεύθυνση και μέτρο:

$$P = P_B = m\upsilon = 2 \cdot 2kgm/s = 4kgm/s$$

ii) α) Για τη μεταβολή της ορμής μεταξύ της στιγμής t_0 και της στιγμής t_1, με βάση το διπλανό σχήμα, έχουμε:



$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_B - \vec{P}_A = \vec{P}_B + \left(-\vec{P}_A\right)$$

Οπότε για το μέτρο της μεταβολής της ορμής παίρνουμε:

$$\Delta P = \sqrt{(P_B)^2 + (P_A)^2} = P\sqrt{2} = 4\sqrt{2}kgm/s$$

Ενώ η διεύθυνση του διανύσματος, σχηματίζει με το διάνυσμα $\vec{P}_B$ γωνία θ, όπου θ=45°, αφού το παραλληλόγραμμο που έχουμε σχεδιάσει, είναι τετράγωνο.

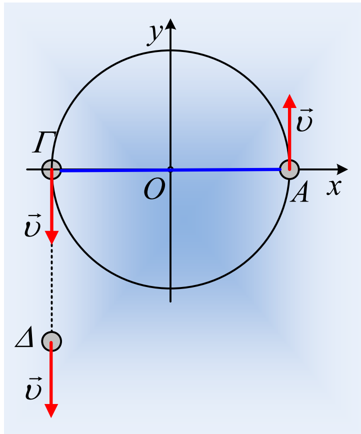
Β) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F} = \vec{F}_{\kappa\varepsilon\nu\tau}$$

Δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος τη στιγμή t_1, έχει την κατεύθυνση της κεντρομόλου δύναμης (της τάσης του νήματος), κάθετη στην ορμή, με φορά προς το κέντρο του κύκλου και μέτρο:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = F = m\frac{\upsilon^2}{R} = 2\cdot\frac{2^2}{8/\pi}kg\cdot m/s^2 = 3{,}14\,kg\cdot m/s^2.$$

iii) Τη στιγμή t_2=4s που κόβεται το νήμα, το σώμα βρίσκεται στο σημείο Γ, αντιδιαμετρικό του σημείου Α, αφού το σώμα έχει διαγράψει τόξο μήκους $s_2 = \upsilon t_2 = 2\cdot 4m = 8m = \frac{\Gamma}{2}$. Αλλά από κει και πέρα το σώμα παύει να δέχεται δύναμη από το νήμα και θα κινηθεί ευθύγραμμα και ομαλά, μετατοπιζόμενο στη διεύθυνση του άξονα y, όπως στο σχήμα κατά:



$$\Delta y = \upsilon\cdot\Delta t = 2\cdot 2m = 4m$$

περνώντας από την θέση Δ, η οποία απέχει κατά 4m από το Γ. Αλλά με βάση αυτά, θα έχουμε για τη στιγμή t_3:

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F} = 0$$

Σχόλιο:

Από την εξίσωση της ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi\cdot 8/\pi}{2}s = 8s$$

Αλλά τότε τη στιγμή t_1=2s = ¼ Τ, το σώμα έχει διαγράψει το ¼ του κύκλου, ενώ τη στιγμή t_2=4s= ½ Τ έχει διαγράψει ημικύκλιο, περνώντας από το σημείο Γ. Θα μπορούσαμε δηλαδή να έχουμε δουλέψει με τη βοήθεια της περιόδου, ενώ στην απάντηση προτιμήθηκε η λύση με τα μήκη των τόξων που έχουν διανυθεί…

Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης